実アーベル体の岩澤不変量と cyclotomic element について : 栗原将人氏の仕事の紹介(代数的整数論とフェルマーの問題)

田谷, 久雄

数理解析研究所講究録
971巻 1996年 101-115

実アーベル体の岩澤不変量と cyclotomic element について (栗原将人氏の仕事の紹介)

早稲田大学理工学部　田谷 久雄 (Hisao Taya)

§1　序

1973年、岩澤氏は [Iw, p.316] において、CM-体でその円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の λ-不変量の "plus-part" が正であるものを見つけることは興味深い問題であると言及している。恐らくはこのことに端緒を発し、Greenberg 氏は、1976年、彼の論文 [Gr] で次の問題を提唱した (ここでは慣例にならって予想として記す)。

予想. p を素数, kを総実代数体とするとき、その円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の λ-不変量 $\lambda_p(k)$ と μ-不変量 $\mu_p(k)$ は共に零であろう。

これは現在しばしば Greenberg 予想と呼ばれている。言い換えれば、総実代数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大体において、その最大不分岐アーベル pro p-拡大が有限であろうというのである。よく知られているように、有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合には任意の素数 p に対してこのことが正しいのであるが、次にシンプルな場合である実2次体の場合には未だ決定的な結果は知られていない。kが $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大の場合には $\mu_p(k)=0$ であることがわかっているので ([FW] 参照)、この場合は本質的には λ-不変量を調べることに帰着されている。

このような状況ではあるが、それでも、小さな奇素数と比較的判別式の小さな実2次体に対しては、ほぼこの予想の正当性を検証することが可能であった ([Ca, Gr, FK1, FK2, FT, OT, Su] 参照)。しかし、そのためには (素数冪を法として) 全単数群を知る必要があり、いくつかのものについては大きな困難に遭遇してしまった。

ところが、近年、全単数群の情報を必要としないいくつかの有効的な検証法が与えられた。つまり、(素数冪を法としての) 基本単数系を必要としない、有限体内の計算や有限群環内の計算で判定できる条件が与えられたのである (但し、これらは反例の検証には使えない)。その一つは、市村氏と隅田氏による円単数と p 進 L 関数から得られる冪級数を使う方法であり ([IS1, IS2] または [IS3] 参照)、これによってルートの中身が 10,000 より小さい実 2 次体の $p=3$ に対する Greenberg 予想はすべて正しいことが確かめられた。いま一つは、Kraft 氏と Schoof 氏による円単数群を法とする全単数群の商群の Pontryagin dual を扱う方法であり ([KS] 参照)、市村-隅田両氏の方法ほどシンプルではないものの、イデアル類群に付随する岩澤加群の構造も決定することができる。そして最後の一つは、栗原氏による motivic コホモロジー群の Deligne や Soulé の円分元 (cyclotomic element) に依る方法であり ([Ku2] 参照)、本質的には円単数を使う方法と同じで、市村-隅田両氏の仕事の影響を受けてはいるものの、これまでのものとは全く異なる観点から得られている点で興味深い。この方法は有限体上の初等的な計算だけで検証が実行でき、イデアル類群に付随する岩澤加群が cyclic である場合に有効だと思われる。

ここでは、最後にあげた栗原将人氏の仕事 (論文 [Ku2]) を紹介する。まず、§ 2 と 3 で主結果を紹介し、§ 4 でこの仕事の背景となる事柄について触れ、§ 5 では主結果の証明の概要について、§ 6 ではさらに実効的な判定法と実際の例について述べていく。

本来、この話しは、講演も含めて、栗原氏本人にやって頂いた方が有意義な内容のものになったことは言うまでもないが、研究集会が行われた時期が栗原氏のプリンストン渡航と重なり、それが叶わぬものとなってしまったのです。しかしながら、この研究集会の代表者である小松氏は、Greenberg 予想に関する仕事もこの研究集会の一つの柱と (少なくとも私が推察する限りでは) お考えだったようで、それを紹介する人物を捜しておられました。そして、今回、早稲田の談話会と駒場セミナーの両方でこれに関連する栗原氏の話を聞いていた私に、紹介の話しが舞い込んできたというわけです。従って、説明が行き届かない部分もあるかと思いますが、それはすべて私の不勉強によるものです。どうぞご理解下さい。

また、興味を持たれた方は、将来出版される栗原氏の論文をどうかご覧下さい。

最後に、このような勉強の場を与えて下さった小松啓一氏と、ご自身の仕事の紹介をお許し下さった栗原将人氏に感謝の意を表します。

§2　主定理 (その 1 : Teichmüller 指標に関する場合)

まずはじめに、Teichmüller 指標に関する場合を述べる。lを奇素数、$\mathbb{F}_l$をl個の元から成る有限体、$\mathbb{F}_l^\times$をその乗法群、gを$\mathbb{F}_l^\times$の生成元とする。つまり、gは mod lの原始根である。また $x \in \mathbb{F}_l^\times$ に対して、$\mathrm{ind}_l(x)$ を $\mathbb{F}_l^\times$ における x によって生成される部分群の指数: $\mathrm{ind}_l(x) = [\mathbb{F}_l^\times :< x >]$ とする。このとき、任意の整数 $r > 1$ に対して、

$$c_{l,r} := \prod_{i=1}^{l-2}(1-g^i)^{i^{r-1}}$$

によって $\mathbb{F}_l^\times$ の元 $c_{l,r}$を定める。ここで、$\mathrm{ind}_l(c_{l,r})$ は gの選び方に依らないことを注意しておく。rが偶数の時には $\mathrm{ind}(c_{l,r})$ は大きな値をとり、rが奇数の時には小さい値をとる傾向がある。我々が興味を持っているのは r が奇数の場合の $\mathrm{ind}(c_{l,r})$ であり、lを動かしたときのその最大公約数の値である。しかし、$\mathrm{ind}(c_{l,r})$ は $l-1$ の約数であり、このまま扱うのでは面白くない。そこで $\mathrm{ind}_l(x)$ の定義を少し定式化する。

p を素数、v_pを $v_p(p) = 1$ によって正規化された p 進付値とし、任意の元 $x \in \mathbb{F}_l^\times$と素数 p に対して、

$$\mathrm{ind}_l(x)_p^* := \begin{cases} p^{v_p(\mathrm{ind}_l(x))} & v_p(\mathrm{ind}_l(x)) < v_p(l-1) \text{ の時}, \\ p^\infty & \text{その他}, \end{cases}$$

と定める。従って、p が $l-1$ と素ならば $\mathrm{ind}_l(x)_p^* = p^\infty$となる。さらに、

$$\mathrm{ind}_l(x)^* := \prod_p \mathrm{ind}_l(x)_p^* = 2^{e_2}3^{e_3}5^{e_5}\cdots, \quad 0 \le e_i \le \infty$$

とおく。ここで、上の積における p は全ての素数を渡る。

定義 1. l が全ての奇素数を動くときの $\mathrm{ind}_l(c_{l,r})^*$の最大公約数を $n(r)$ と定める。

最大公約数の計算において p^∞ は形式的に扱う。従って、$n(r)$ は無限になる可能性もあるが、実は次が成り立つ。

定理 1. rを奇数とするとき、$n(r) \neq \infty$ となる。

注意 1. p を奇素数、ωを p に関する Teichmüller 指標、A_pを p-分体 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ のイデアル類群の p-part とし、そのω^i-part を $A_p^{\omega^i}$で表す。このとき $r \geq 3$ を奇数とすれば、任意の奇素数 p に対して $A_p^{\omega^{1-r}} = 0$ となることと $n(r) = 1$ となることとは同値になる ([Wa] 参照)。とくに、[Ku1] により $n(3) = 1$ である。

この注意からわかるように、Vandiver 予想が正しければ、勝手な奇数 $r \geq 3$ に対して $n(r) = 1$ となることが期待される。一方、Greenberg 予想は、これより弱く、rが 3 以上の奇数を動くとき $n(r)$(の p-part) が有界であることを予期している。次にこのことを述べる。これがこの章の主定理である。

p を奇素数とする。代数体 Fに対して、その円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大を F_∞、F_∞ の最大不分岐アーベル pro p-拡大体の F_∞上の Galois 群を X_{F_∞}で表す。このとき X_{F_∞} は有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]]$-加群となる。$\Lambda$を $\mathbb{Z}_p$上の冪級数環 : $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とする。これは、$\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ の位相的生成元γを一つ固定して、γと $1+T$を同一視することで $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]]$ と同型になる。さらに、有限生成ねじれΛ-加群 Mに対して、Λの単元の違いを除いて定まるその特性冪級数を $\mathrm{char}(M)$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

定理 2. p を奇素数、$r_0 \geq 3$ を奇数とする。また、Kを p-分体 : $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ 、ωを p の Teichmüller 指標とし、$X_{K_\infty}^{\omega^i}$ を X_{K_∞}のω^i-part とする。このとき次の 2 条件は同値である。

(a) ある整数 $n > 0$ があって、任意の奇数 $r \geq 3$, $r \equiv r_0 \pmod{p-1}$ に対して $p^n \nmid n(r)$ となる。

(b) $\mathrm{char}(X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}})$ は $\mathbb{Z}_p$に根を持たない。

とくに、$X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}}$が有限ならば、$r$が上のような条件を満たして動くとき、$n(r)$ の p-part は有界となる。

§3　主定理 (その 2 : 非自明な Dirichlet 指標を伴う場合)

p を奇素数とし、以下固定しておく。先の章では Teichmüller 指標だけの場合を扱ったが、この章では非自明な Dirichlet 指標を伴う場合の、固定された p に対する p-part についての話しをする。

$N \geq 3$ を整数とし、

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

を原始的な Dirichlet 偶指標とする。以下、簡単のためχの位数を $p-1$ の約数だと仮定し、χを

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{\times}$$

なる p 進指標とみなす。

$n \geq 1$ を整数とし、lを $l \equiv 1 \pmod{p^n N}$ なる素数とし、$l-1 = p^n NM$, $M \in \mathbb{Z}$ と書くことにする。この素数 lが p-part を調べる際の補助的な役割りを担う。

まず、任意の奇数 $r \geq 1$ と整数 i に対して

$$c_{l,N,r,p^n}(i) := \prod_{j=1}^{p^n-1} (1 - g^{Mi+NMj})^{MN(Mi+NMj)^{r-1}}$$

によって $F_l^{\times}$の元 $c_{l,N,r,p^n}(i)$ を定める。このとき $c_{l,N,r,p^n}(i)^{p^n} = 1$ であるので、この元にはχが作用する。そこで、

$$c_{l,r,p^n}^{\chi} := \prod_{i=1}^{N-1} c_{l,N,r,p^n}(i)^{\chi(i)^{-1}}$$

と定める。このとき、$\mathrm{ind}_l(c_{l,r})$ と同様に、$\mathrm{ind}_l(c_{l,r,p^n}^{\chi})$ も gのとり方に依らず定まる。c_{l,r,p^n}^{χ}の定義より、∞-part を除いて $\mathrm{ind}_l(c_{l,r,p^n}^{\chi})^* = \mathrm{ind}_l(c_{l,r,p^n}^{\chi})_p^*$ である。

定義 2. 素数 lと整数 n を $l \equiv 1 \pmod{p^n N}$ となる条件の下ですべて動かした時の $\mathrm{ind}_l(c_{l,r,p^n}^{\chi})^*$の最大公約数を $n^{\chi}(r)_p$と定める。

このとき、再び次が成り立つ。

定理 3. $n^{\chi}(r)_p \neq \infty$ となる。

定数 $n^{\chi}(r)_p$ に対しても、先の章と同様に次の結果が成立する。これがこの章の主定理である。ここでも、F を代数体とするとき、F_∞ や X_{F_∞}, $X^{\chi}_{F_\infty}$ 等は先の章と同じ意味で使う。

定理 4. p を奇素数、$r_0 \geq 3$ を奇数、$N \geq 3$ を整数とし、χ を導手 N の $\mathbb{Z}_p^\times$ に値をもつ偶指標、k を N-分体 $\mathbb{Q}(\mu_N)$ の χ に付随する部分体、さらに、$K = k(\mu_p)$ とおく。

(1) ω を p の Teichmüller 指標とし、$\psi = \chi\omega^{1-r_0}$ とおく (これは偶指標)。$\psi(p) \neq 1$ の時、次の 2 条件は同値。

(a) ある整数 $n > 0$ があって、任意の奇数 $r \geq 3, r \equiv r_0 \pmod{p-1}$ に対して $p^n \nmid n^{\chi}(r)_p$ となる。

(b) $\mathrm{char}(X^{\psi}_{K_\infty})$ は $\mathbb{Z}_p$ に根を持たない。

(2) $\chi(p) = 1$ の時、整数 $r \equiv 1 \pmod{p-1}$ に対して、$a_r := v_p(\frac{r-1}{p-1}) + 1$ とおけば、次の 2 条件は同値。

(a) ある整数 $n > 0$ があって、任意の奇数 $r \geq 3, r \equiv 1 \pmod{p-1}$ に対して $p^{n+a_r} \nmid n^{\chi}(r)_p$ となる。

(b) $\mathrm{char}(X^{\chi}_{K_\infty})$ は $\mathbb{Z}_p$ に根を持たない。

ここで、$n^{\chi}(r)_p$ に関して、次のような Kummer の合同式的性質が直ちに従うことを注意しておく。

補題 1. r と r' を $r \equiv r' \pmod{p^{n-1}(p-1)}$ なる 2 つの奇数とする。このとき、$p^n \mid n^{\chi}(r)_p \iff p^n \mid n^{\chi}(r')_p$ となる。

よって、上の定理の条件 (a) を確かめるためには、原理的には、有限個の r に対して確かめれば十分だということになる。

さて、与えられた ($\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の exponent が $p-1$ の約数であるような) 実アーベル体 k に対して、χ を $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ の p 進 (偶) 指標とするとき、“χ-part”の Greenberg 予想は「$X^{\chi}_{k(\mu_{p^\infty})}$ が有限である」ということを主張している。ここで μ_{p^∞} は 1 のすべての p 冪乗根の成す群である

$(K = k(\mu_p)$ とすれば $K_\infty = k(\mu_{p^\infty})$ である)。従って、$X_{k(\mu_{p^\infty})}$の minus-part である $X^{\chi^{-1}\omega}_{k(\mu_{p^\infty})}$について、その $\mathrm{char}(X^{\chi^{-1}\omega}_{k(\mu_{p^\infty})})$ の根がすべて $\mathbb{Z}_p$の元となるような場合 (例えば $X^{\chi^{-1}\omega}_{k(\mu_{p^\infty})}$ のλ-不変量が 1 となるような場合) には、$\mathrm{char}(X^{\chi}_{k(\mu_{p^\infty})})$ の根もすべて $\mathbb{Z}_p$の元となるので、定理の条件 (a) を調べることによって、"χ-part"の Greenberg 予想を検証することができるということになるのである。

実際の計算に即したより有効な判定法は、最後の章で簡単に紹介する。それは、有限体 $\mathbb{F}_l^\times$の元 $c_{l,r}$や c^{χ}_{l,r,p^n}を計算することによって得られるもので、有限体上の計算だけでその判定が可能となっている。

§4　étale コホモロジーからの諸結果とアイデアの背景

p を奇素数、$r \geq 3$ を奇数とし、Kを $\mathbb{Q}$ 上の有限次アーベル拡大、O_Kをその整数環、さらに、Mを Kの最大 p-分岐 pro p-拡大体 (p の外で不分岐な Kの最大 pro p-拡大体) とする。また、$\mathbb{Z}_p(r)$ によって r回の Tate twist: $\mathbb{Z}_p(r) = (\varprojlim \mu_{p^n})^{\otimes r}$を表し、$H^q(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$ によって q次元étale コホモロジー群 $H^q_{et}(SpecO_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$ を表すことにする (この場合これは Galois コホモロジー群 $H^q(\mathrm{Gal}(M/K), \mathbb{Z}_p(r))$ と考えて良い)。さらに、任意のétale 層 $\mathcal{M}$ に対しても、$H^q_{et}(SpecO_K[\frac{1}{p}], \mathcal{M})$ を単に $H^q(O_K[\frac{1}{p}], \mathcal{M})$ と略記する。

μ_{p^n}を 1 の p^n乗根の成す群とし、$K_n = K(\mu_{p^n})$、$K_\infty = \cup K_n$、$G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおき、K_nの p-単数群 (p の外で単数であるものの成す群) を E'_{K_n}とし、その部分群である Sinnott の意味での p-円単数群を C'_{K_n}で表す。また、群 G と G-加群 $\mathcal{M}$ に対して、$\mathcal{M}^G$を $\mathcal{M}$ の G-invariant part: $\mathcal{M}^G = \{m \in \mathcal{M} \mid m^g = m, g \in G\}$、$\mathcal{M}_G$を $\mathcal{M}$ の G-coinvariant part: $\mathcal{M}_G = \mathcal{M}/I_G\mathcal{M}, I_G = < g-1 \mid g \in G >$とする。まず、

$$\mathcal{H}^1 := \varprojlim H^1(O_{K_n}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$$

とおく。ここで、射影極限は corestriction 写像によるものである。このとき次が成り立つ。

命題 1. 次の標準的準同型写像が存在する：

$$
\begin{aligned}
(\varprojlim C'_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p(r-1))_{G_\infty} &\longrightarrow (\varprojlim E'_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p(r-1))_{G_\infty} \\
&\longrightarrow \mathcal{H}^1_{G_\infty} \\
&\longrightarrow H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))
\end{aligned}
$$

そこで、この標準的準同型写像の像を

$$C_r := \mathrm{Im}(\,(\varprojlim C'_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p(r-1))_{G_\infty} \longrightarrow H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))\,)$$

と書くことにする。さらに、標準的準同型写像 $\mathcal{H}^1 \to H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$ についてもその像を

$$E_r := \mathrm{Im}(\,\mathcal{H}^1 \longrightarrow H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))\,)$$

と書くことにする。このとき、$C_r \subset E_r \subset H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$ となる。

さて、C_rに関して類数公式の analogy である次の命題が成立する ($K = \mathbb{Q}$ のときは Bloch-加藤両氏 [BK] による)。

命題 2 ([KNF] の定理 5.4 参照).

$$\sharp(H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))/C_r) = \sharp(H^2(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$$

A'_nを $O_{K_n}[\frac{1}{p}]$ のイデアル類群の p-Sylow 部分群 (O_{K_n}の p-イデアル類群の p-Sylow 部分群)： $A'_n = Pic(O_{K_n}[\frac{1}{p}])$ とし、X'_{K_∞}をそのノルムに関する射影極限： $X'_{K_\infty} = \varprojlim A'_n$とする。つまり、$X'_{K_\infty}$は、$K_\infty$の最大不分岐アーベル pro p-拡大の部分体で p 上の K_∞のすべての素点が完全分解している最大の体の K_∞上の Galois 群そのものである。ここで、実アーベル体の場合には $\mathrm{char}(X'_{K_\infty}) = \mathrm{char}(X_{K_\infty})$ となっていることを注意しておく。X'_{K_∞}の $\mathbb{Z}_p$-ねじれ部分群を $X'_{K_\infty,tors}$で表すことにする。このとき H^1 について次が成り立つ。

命題 3 ([KNF] の定理 3.2 参照). 次の完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{H}^1)_{G_\infty} \longrightarrow H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r)) \longrightarrow (X'_{K_\infty,tors}(r-1))^{G_\infty} \longrightarrow 0$$

また、乗法群 $\mathbb{G}_m$ に関する Kummer の完全系列: $0 \to \mathbb{Z}/p^n(1) \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$、および、類体論による $O_{K_n}[\frac{1}{p}]$ の Brauer 群の計算、そしてさらに、同型 $H^2(O_{K_n}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}/p^n(r))_{\mathrm{Gal}(K_n/K)} \simeq H^2(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}/p^n(r))$ によって、次の H^2 に関する結果が得られる。

命題 4. 次の完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow (X'_{K_\infty}(r-1))_{G_\infty} \longrightarrow H^2(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r)) \longrightarrow (\bigoplus_{v|p} \mathbb{Z}_p(r-1))^0_{G_\infty} \longrightarrow 0$$

ここで、v は K_∞ の p 上のすべての素点を動き、$(\oplus\mathbb{Z}_p(r-1))^0$ は、(a_i) を $\sum a_i$ に対応させる写像 $\oplus\mathbb{Z}_p(r-1) \to \mathbb{Z}_p(r-1)$ の核である。

さて、以上の諸結果に基づいて、Greenberg 予想への応用のアイデアの背景について述べていきたい。

χ を導手 N の $\mathbb{Z}_p^\times$ に値をもつ偶指標、k を χ に付随する実アーベル体とし、$K = k(\mu_p)$ とする。また、任意の $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})]$-加群 M に対して、その χ-part を

$$M^\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})]} O_\chi$$

と定める。ここで、O_χ は $\mathbb{Z}_p$ に χ の値を添加して得られる $\mathbb{Z}_p$ の拡大環で、$\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ は χ で作用している (O_χ も $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})]$-加群とみる)。このとき、$O_\chi$-加群として

$$H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi \simeq O_\chi$$

であり、

$$C_r^\chi \subset E_r^\chi \subset H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi$$

なる包含関係が成り立つ。まず、命題 3 より

$$[H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi : E_r^\chi] \approx (X'_{K_\infty, tors}(r-1)^\chi)^{G_\infty}$$

となる。ここで、$\approx$ はだいたい位数が等しいという意味である。よって、$H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi$ における E_r^χ の指数は $X'^{\chi\omega^{1-r}}_{K_\infty}$ の "$\mathbb{Z}_p$-ねじれ部分" の大きさが寄与する部分になる。また、命題 2 と 4 より

$$[H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi : C_r^\chi] \approx (X'_{K_\infty}(r-1)^\chi)_{G_\infty} + \text{“}\alpha\text{”}$$

となり、$H^1(O_K[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))^\chi$における C_r^χの指数は $X'^{\chi\omega^{1-r}}_{K_\infty}$ と“α”の大きさが寄与する部分になる。ここで、“α”は命題 4 の完全系列の余核の大きさから生じるものである (定理 2 や定理 4 の (1) の場合には現れないが、定理 4 の (2) の場合には a_rとして現れてくる)。以上より、

$$[E_r^\chi : C_r^\chi] \approx X'^{\chi\omega^{1-r}}_{K_\infty} \text{の } \mathbb{Z}_p\text{-自由部分の大きさ} + \text{“}\alpha\text{”}$$

となるので、この左辺の指数が“α”程度の大きさならば、$X'^{\chi\omega^{1-r}}_{K_\infty}$ は $\mathbb{Z}_p$-ねじれ部分だけしかないことになり、つまり、“$\chi\omega^{1-r}$-part”の Greenberg 予想が正しいということが結論できることになる。よって、C_rや C_r^χの生成元である Deligne の元 $c_r^D(\zeta)$ や $(c_r^D)^\chi = \sum c_r^D(\zeta^i)^{\chi(i)^{-1}}, \zeta \in \mu_N$を調べて見ようということに至ったのであり ([BK] の p.384、[De] の§ 3 参照)、これらの元の有限体 $\mathbb{F}_l$への像が先の章で定義した $c_{l,r}$や c_{l,r,p^n}^χになっているのである。

§ 5　Deligne の元と定理の証明の概略

この章では、定理 1 と 2 の証明の概略を述べる (アバウトな解説と思って下さい)。定理 3 と 4 も本質的には同じである。記号は§ 2 と 4 のものを用いる。

まず、Deligne の元 $c_r^D(1) \in C_r$を取り上げる。lを素数とし、$L = \mathbb{Q}(\mu_{l-1})$、$\mathfrak{l}$ を l上の L の素イデアルとする。このとき、$\kappa(\mathfrak{l}) = O_L/\mathfrak{l}$ とおけば、$\kappa(\mathfrak{l}) \simeq \mathbb{F}_l$となる。Deligne の元 $c_r^D(1)$ は、$H^1(\kappa(\mathfrak{l}), \mathbb{Z}/(l-1)(r))$ において

$$\sum_{w\in\kappa(\mathfrak{l})^\times} [1-w] \otimes (w)^{\otimes(r-1)}$$

なる像をもつ (実はこれが $c_r^D(1)$ の特徴付けである ([BK, De, So1, So2] 参照))。ここで、$[*]$ は $E'_L(r-1)/(l-1)$ における $*$ の類を表し、さらにこれは $E'_L(r-1)/(l-1) \to H^1(\kappa(\mathfrak{l}), \mathbb{Z}/(l-1)(r))$ による像とも同一視しておく。gを mod lの原始根とすると、$H^1(\kappa(\mathfrak{l}), \mathbb{Z}/(l-1)(r)) \simeq \mathbb{F}_l^\times \otimes \mu_{l-1}^{\otimes(r-1)}$によって、この元は

$$\prod_{i=1}^{l-2} (1-g^i)^{i^{r-1}} \otimes g^{\otimes(r-1)} = c_{l,r} \otimes g^{\otimes(r-1)}$$

と等しくなる。$c_r^D(1)$ は C_r の生成元であるので、このことから Chebotarev の密度定理を使えば、

$$[H^1(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r)) : C_r] = n(r) \text{ の } p\text{-part}$$

となる。とくに、$c_r^D(1) \neq 0$ ([So1, So2] 参照) であるので定理 1 が従う。

次に定理 2 に移る。$\mathrm{char}(X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}})$ が $\mathbb{Z}_p$ に根 ξ を持てば、$X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}}/(T-\xi)$ は無限群になる。従って、ξ に収束する点列 $\xi_n \in \mathbb{Z}_p$(これらは根ではない) をとれば、有限群 $X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}}/(T-\xi_n)$ の位数はいくらでも大きくできる。もちろん $\mathbb{Z}_p$ に根を持たなければ、このような点列を $\mathbb{Z}_p$ 内にとることはできない。このことより、集合 $\{r \in \mathbb{Z} : r \equiv r_0 \pmod{p-1}, r \geq 3\}$ が $\mathbb{Z}_p$ 内で稠密であるので、$\mathrm{char}(X_{K_\infty}^{\omega^{1-r_0}})$ が $\mathbb{Z}_p$ に根を持たないことと、ある整数 $n > 0$ があって、任意の奇数 $r \geq 3$, $r \equiv r_0 \pmod{p-1}$ に対して $p^n \nmid \sharp(X_{K_\infty}(r-1)_{G_\infty})$ となることとが同値になる。p が不分解であるので、命題 4 より $X_{K_\infty}(r-1)_{G_\infty} \simeq H^2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p(r))$ を得る。よって、命題 2 と上のことから定理 2 の主張が得られることになる。

§6　より実効的な判定法といくつかの例

最後に、より実際の計算に適した形に書き換えられた判定法の一部をここで紹介する。講演を引き受けた段階では栗原氏が計算していない例についてもいろいろ計算してみると宣言したのですが、今現在全く手が付いておらず (どうも済みません)、ここでは栗原氏が計算された例の紹介をしていく。

感じがつかめるように、定理 4 の (1) の場合だけを取り上げるとしよう。記号は§ 3 と同じものを使う。つまり、p が固定された奇素数で、r_0 が 3 以上の奇数、l は $l \equiv 1 \pmod{p^n N}$) なる素数 (以下 l と書いたらこの条件を満たしているとする)、χ は $\mathbb{Z}_p^\times$ に値をもつ導手 N の偶指標、k は χ に付随する実アーベル体とし、$K = k(\mu_p)$ 、$K_\infty = k(\mu_{p^\infty})$ 、$G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/k)$ 、さらに、$\psi = \chi\omega^{1-r_0}$ とおき、$\psi(p) \neq 1$ の場合を扱う。

まず最初に、$c_{l,r_0,p}^\chi \neq 1$ となる素数 l が存在すれば、命題 2 と 4 によって $X_{K_\infty}^\psi = 0$ となることがわかる。そこで、これを “自明な” 場合と呼ぶ

ことにし、以下そうでない場合について考える。さらに次の仮定をする。

(A) $\mathbb{F}_l^\times$で $c^\chi_{l,r_0,p^2} \neq c^\chi_{l,r_0+p-1,p^2}$ となる素数lが存在する。

この仮定の下で、整数列a_nを帰納的に定義していく。まず$a_0 = r_0$と定める。a_{n-1}まで定義されたとしよう。このとき、上の仮定とChebotarevの密度定理から、$\mathbb{F}_l^\times$で $c^\chi_{l,a_{n-1},p^n} \neq c^\chi_{l,a_{n-1}+p^{n-2}(p-1),p^n}$となる素数$l$が存在することがわかる。このことより、$a_{n-1} \leq r' \leq a_{n-1} + p^{n-1}(p-1)$ において $r' \equiv r_0 \pmod{p-1}$ かつ $c^\chi_{l,r',p^n} = 1$ となるr'が存在することが従う。ここで、

(R_n) すべての素数l' (lと同じ条件を満たす) に対して $c^\chi_{l',r',p^n} = 1$ となる。

という条件 (R_n) について考える。これが成り立てば、すべての素数lに対して $c^\chi_{l,r',p^n} = 1$ となるので、r'はlに依らないことになる。そこで、このとき$a_r = r'$と定める。(R_n) が不成立のときにはa_nは定めない。いま"非自明な"場合を扱っているので、(R_1) は常に成立している。まず、定理 4 の (1) を使って次が示せる。

定理 5. $\psi(p) \neq 1$ かつ (A) の下で、$n \geq 2$ に対して、$(R_1), \cdots, (R_{n-1})$ が成立し、(R_n) が不成立とする。このとき$X^\psi_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}/p^{n-1}$となる。

さらに、(Greenberg 予想のように) このような細かい情報が不要な場合には、次の判定法が有効となる。

定理 6. $\psi(p) \neq 1$ のとき、次の条件を満足する素数l_1, l_2 (lと同じ条件を満たす)、整数r_1, r_2、及び、整数$n \geq 2$ が存在するとする:

$r_1 \equiv r_2 \pmod{p^{n-2}(p-1)}$, $c^\chi_{l_1,r_1,p^n} = 1$, $c^\chi_{l_1,r_2,p^n} \neq 1$, $c^\chi_{l_2,r_1,p^n} \neq 1$.

このとき$X^\psi_{K_\infty}$は有限、つまり、"ψ-part" の Greenberg 予想は正しい。

例 1. $p = 3$ で $k = \mathbb{Q}(\sqrt{254})$ の場合を考えてみよう。これは、[Ca, Gr] で未解決な例としてあげられたもので、最近 [IS1] で初めて Greenberg 予想が確かめられた厄介ものである。

χは $k = \mathbb{Q}(\sqrt{254})$ に付随する偶指標。$r_0 = 3$ ととる。$\psi(p) = \chi(p) \neq 1$ は明らかである。類数が 3 で割れているので、これは "非自明な" 場合

である。よって、(R_1) は成り立ち、$a_1 = 3$ となる。まず、$l = 18289 \equiv 1 \pmod{p^2N = 3^2 \cdot 4 \cdot 254}$ に対して (A) は成立している。また、$r' = 5$ と $l \equiv 1 \pmod{p^2N}$ となる最初の 15 個の素数 l に対して $c^{\chi}_{l,r',p^2} = 1$ がわかる。そこで、(R_2) が成り立つだろうと考え、$a_2 = 5$ とおく。同様にして、$(R_3), (R_4), (R_5)$ の成立の可能性が示唆されるので、$a_3 = 5, a_4 = 23, a_5 = 77$ とおく。(R_6) については、$l = 5925313 \equiv 1 \pmod{p^2N = 3^6 \cdot 4 \cdot 254}$ をとると、$c^{\chi}_{5925313,77,3^6} \neq 1$ かつ $c^{\chi}_{5925313,401,3^6} = 1$ となる。ゆえに $r' = 401$ が見つかる。しかしながら $c^{\chi}_{20738593,401,3^6} \neq 1$ となる。よって、(R_6) は不成立であることがわかる。従って、$\sharp X^{\psi}_{K_\infty} = \sharp X^{\chi}_{K_\infty} \leq 3^5$ (おそらくは $X^{\chi}_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}/3^5$) を得る。以上より $\lambda_3(\mathbb{Q}(\sqrt{254})) = 0$ となる。

さらに、このような計算を行うことによって (一部には Soulé の元に対応する有限体 $\mathbb{F}_l$ の元も使って) 、実 6 次アーベル体の $p = 7$ に対する Greenberg 予想も検証している。最後にその結果を定理として書き留めておこう。

定理 7. 定数 $m < 1000$ に対して、実 6 次アーベル体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \cos(2\pi/7))$ の $p = 7$ に対する岩澤 λ-不変量は零である。

参考文献

[BK] Bloch, S. and Kato, K., *L*-functions and Tamagawa numbers of motives, in The Grothendieck Festschrift Vol. 1, Progress in Math., Vol. **86**, 89–111, Birkhäuser (1990).

[Ca] Candiotti, A., Computations of Iwasawa invariants and K_2, Compositio Math., **29** (1974), 89–111.

[De] Deligne, P., Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in Galois groups over $\mathbb{Q}$, Publ. MSRI, No. **16**, 79–298, Springer-Verlag (1989).

[FW] Ferrero, B. and Washington, L. C., The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math., **109** (1979), 377–395.

[FK1] Fukuda, T. and Komatsu, K., On $\mathbb{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, **38** (1986), 95–102.

[FK2] Fukuda, T. and Komatsu, K., A capitulation problem and Greenberg's conjecture of real quadratic fields, to appear in Math. Comp.

[FT] Fukuda, T. and Taya, H., The Iwasawa λ-invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, Acta Arith., **69** (1995), 277–292.

[Gr] Greenberg, R., On the Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. Math., **98** (1976), 263–284.

[IS1] Ichimura, H. and Sumida, H., On the Iwasawa λ-invariants of certain real abelian fields, preprint (1995).

[IS2] Ichimura, H. and Sumida, H., On the Iwasawa λ-invariants of certain real abelian fields II, preprint (1995).

[IS3] Ichimura, H. and Sumida, H., ある種の実アーベル体の岩澤λ-不変量について, 本講究録掲載 (予定).

[Iw] Iwasawa, K., On $\mathbb{Z}_p$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math., **98** (1973), 246–326.

[KNF] Kolster, M., Nguyen Quang Do, T., and Fleckinger, V., Twisted S-units, p-adic class number formulas and the Lichtenbaum conjectures, preprint (1994).

[KS] Kraft, J. and Schoof, R., Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields, Compositio Math., **97** (1995), 135–155.

[Ku1] Kurihara, M., Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of $\mathbb{Z}$, Compositio Math., **81** (1992), 223-236.

[Ku2] Kurihara, M., The Iwasawa λ invariants of real abelian fields and the cyclotomic element, preprint (1995).

[OT] Ozaki, M. and Taya, H., A note on Greenberg's conjecture of real abelian number fields, Manuscripta Math., **88** (1995), 311–320.

[So1] Soulé, C., On higher p-adic regulators, in Lecture Notes in Math., **854**, 372–401, Springer-Verlag (1981).

[So2] Soulé, C., Éléments cyclotomiques en K-théorie, Astérisque, **147-148** (1987), 225–257.

[Su] Sumida, H., Greenberg's conjecture and the Iwasawa polynomial, preprint (1995).

[Wa] Washington, L. C., *Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Math. vol. **83**, Springer-Verlag (1982).

(追記) この場をお借りして、私の京大数理研講究録, no. 844, pp. 39–49 の "実 2 次体の岩澤λ-不変量について"の表に一部誤りがあったので訂正させて頂きたい。それは p. 47 と p. 48 の表 1 と 2 の "(n_1, n_2) の実際の個数"の値で、正しい個数の値は "Computational research on Greenberg's conjecture for real quadratic fields", Mem. of School of Sci. and Engrg. Waseda Univ., **58** (1994), pp.175–203 (福田隆氏との共著) の p. 181 の Table 1 及び 2 に掲載してある。

田谷　久雄 (Hisao Taya)
早稲田大学理工学部 数学科
〒169　東京都新宿区大久保 3–4–1